Repetition

- Baser för $\mathbb{R}^n$

n st. vektorer

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$

som är

linjärt oberoende

nov 25-09:56

Alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ blir linjärkombinationer av dessa;

$$\bar{v} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \dots + a_n\bar{u}_n$$

på ett unikt sätt

nov 25-09:58

Vi kan därför representera $\bar{v}$ med koordinaterna

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

relativt basen

$$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$$

nov 25-09:58

Det blir lika många tal som förut, dvs n st.

Poängen: För ett visst val av bas kan det bli lättare att lösa ett visst problem.

nov 25-09:58

Inversa funktioner

Om f är en funktion säger vi att f är **inverterbar**

nov 25-09:58

Om det går
att lösa

$$f(x)=y$$

på ett unikt sätt
för varje y.

nov 25-09:58

Ex:

$$f(x) = 2x - 3$$

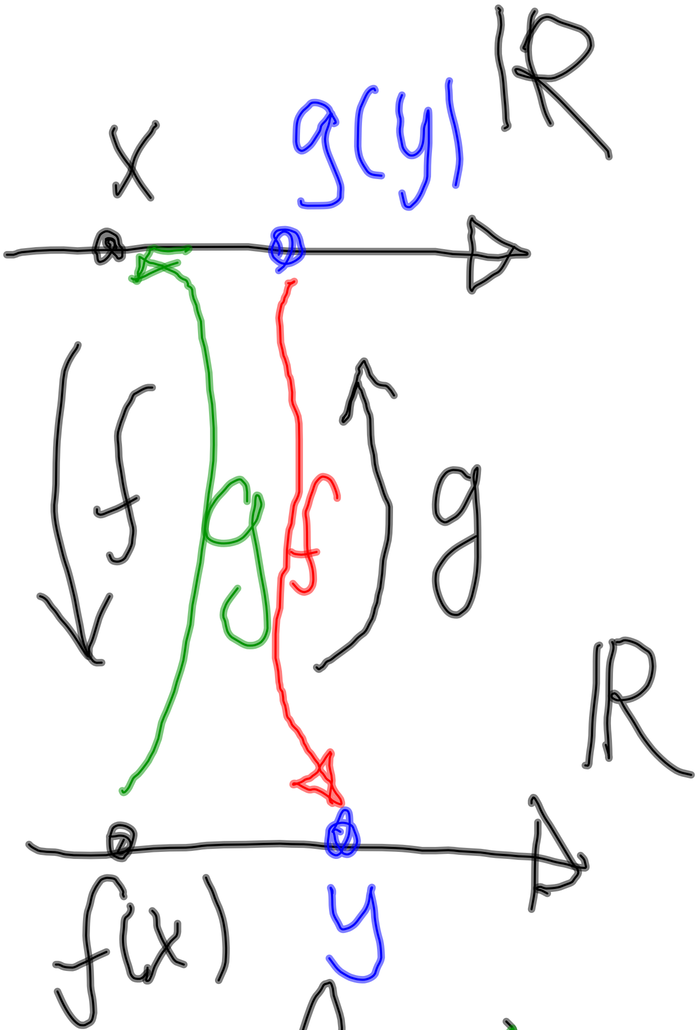
Lös

$$2x - 3 = y$$

$$x = \frac{y+3}{2}$$

$$g(y) = \frac{y+3}{2}$$

nov 25-10:11



$$g(f(x)) = x$$

$$f(g(y)) = y$$

nov 25-10:13

Några fler kända exempel

- exp: $\longrightarrow \mathbb{R}$

$$\longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\exp(x) = e^x$$

Inversen

- ln $\longrightarrow \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

nov 25-10:15

$$\begin{cases} \exp(\ln y) = y & y \in \mathbb{R}^+ \\ \ln(\exp(x)) = x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Alltså är

ln inversfunktion till

exp.

nov 25-10:17

Fler exempel

$f(x) = x^2$

Kan vi lösa

$$x^2 \overset{?}{=} y$$

för alla y på ett unikt sätt?

nov 25-10:19

Det funkar bara för $x, y \geq 0$

Då har vi att

$g(y) = \sqrt{y}$

är inversfunktion till $f(x) = x^2$.

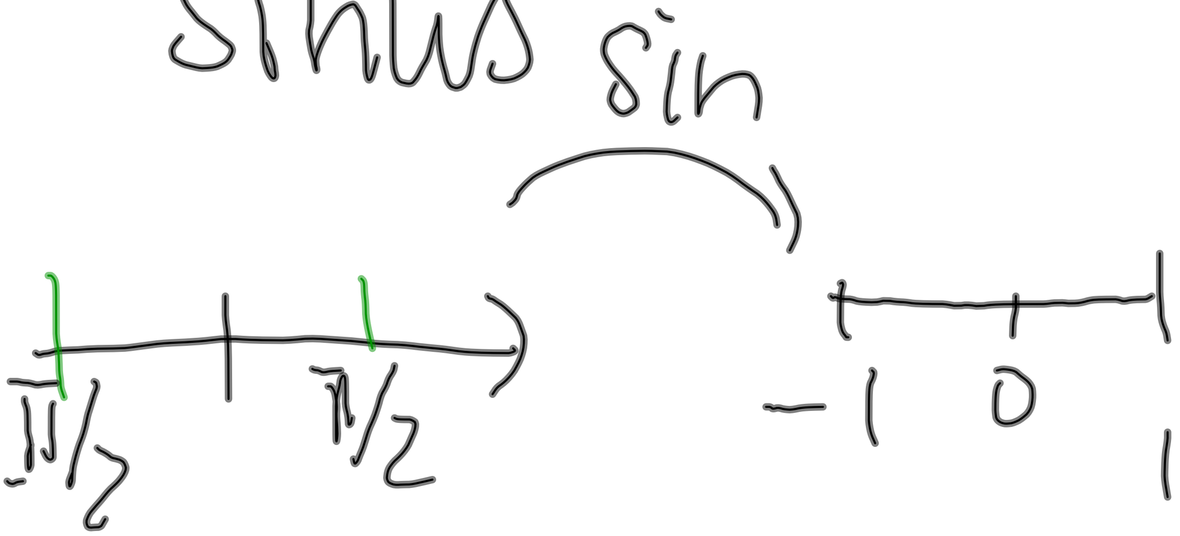
nov 25-10:21

För $f(x)=x^3$ fungerar det för alla $x \in \mathbb{R}$ och $g(y)=\sqrt[3]{y}$ är inversfunktion.

nov 25-10:22

Ex

Sinus



mellan intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ till $[-1, 1]$ fungerar det att

nov 25-10:23

hitta unika lösn.
till $\sin(x) = y$
för alla $y \in [-1, 1]$
och arcsin(y)
är inversfunktion
till sin(x)

nov 25-10:25

Inverterbara linjära avbildningar

Om det finns **unik** lösning till

$$T(\bar{u}) = \bar{v}$$

för **alla** $\bar{v}$ är T **inverterbar**.

nov 25-10:27

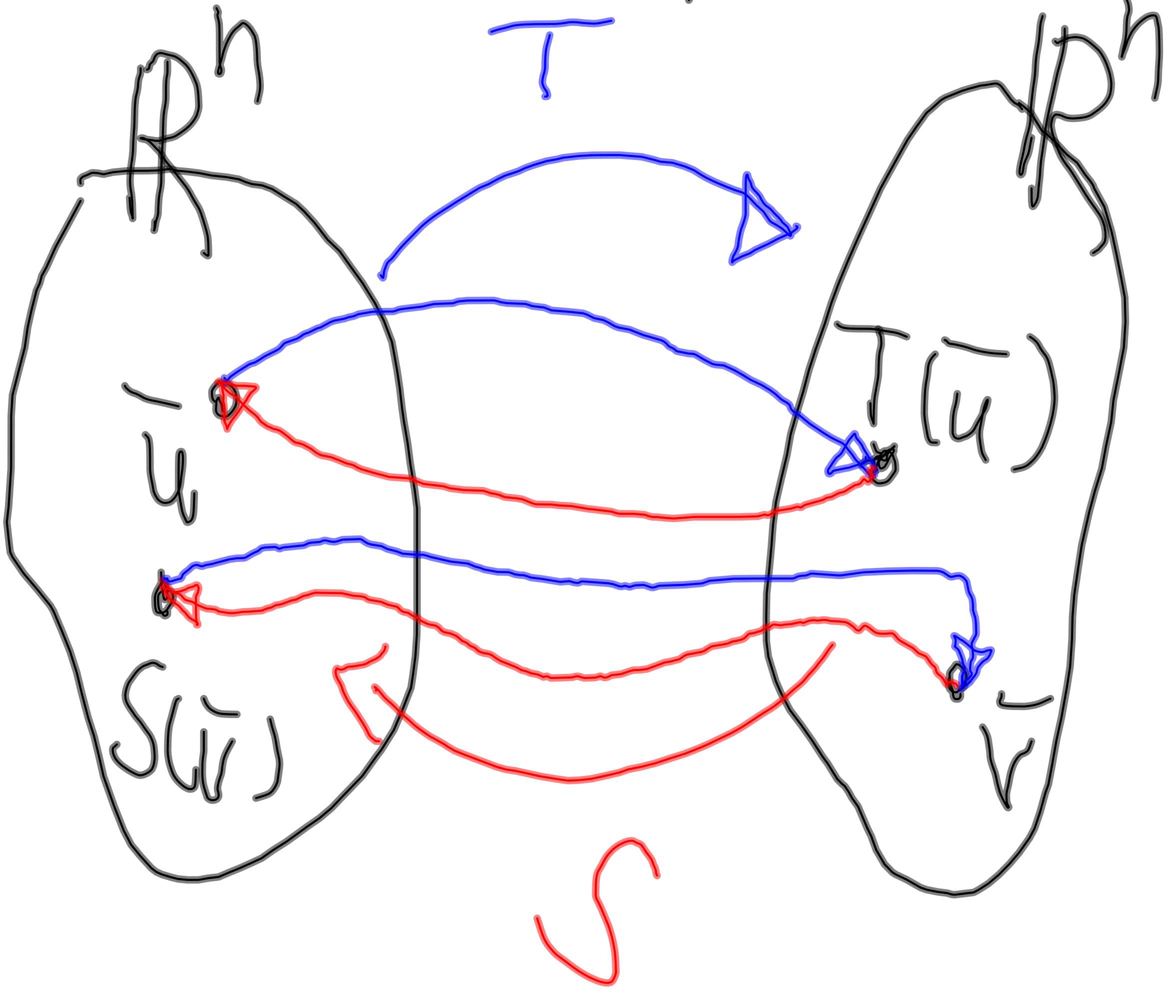
Vi kan i så fall kalla lösningen för
$S(\bar{v})$
och får att
$$T(S(\bar{v})) = \bar{v}$$

nov 25-10:28

Vi får också

att

$$S(T(\bar{u})) = \bar{u}$$



nov 25-10:29

Det finns bara inverterbara avbildningar från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^n$ om $m = n$.

nov 25-10:32

Vi vet att

det finns unik

lösning till

$T(\bar{u}) = \bar{v}$

för alla $\bar{v}$ precis

om $\det(A) \neq 0$

nov 25-10:34

där A är
matrisen för T.

T linjär $\Longrightarrow$
T^{-1} är linjär

nov 25-10:34

Alltså finns matris B för T^{-1}

$T(T^{-1}(\bar{u})) = \bar{u} \in \mathbb{R}^n$

$AB\bar{u} = \bar{u} \quad \forall \bar{u}$

Alltså $AB = I_n$

nov 25-10:38

Måste skriva inverserna i omvänd ordning

$$A^{-1}\underbrace{B^{-1}B}_{I}A = A^{-1}A = I$$

Alltså

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

nov 25-10:42

Gausselimination kan också invertera matriser.

$$\left(A \mid I \right)$$

nov 25-10:45

Vi löser problemen

$$A\bar{x} = \bar{e}_1$$

$$A\bar{x} = \bar{e}_2$$

$$\vdots$$

$$A\bar{x} = \bar{e}_n$$

samtidigt

nov 25-10:47

Om A är matrisen för T, vilken är då matrisen för T^{-1}?

Svar: A^{-1}

För att se hur den ser ut behöver vi $T^{-1}(\bar{e}_1), T^{-1}(\bar{e}_2)$...

nov 25-10:47

$$A\bar{x} = \bar{e}_1$$

löser problemet:
vilket $\bar{x}$ skickar
T på $\bar{e}_1$?

Alltså är lösningen

$$\bar{x} = T^{-1}(\bar{e}_1)$$

nov 25-11:06

Alltså ger lösningarna till

$$A\bar{x}=\bar{e}_1$$
$$A\bar{x}=\bar{e}_2$$
$$\vdots$$
$$A\bar{x}=\bar{e}_n$$

kolonnerna i A^{-1}

nov 25-11:07

$$\left(A \mid I\right)$$

$$\Big\downarrow \text{ G.J. elim.}$$

$$\left(I \mid A^{-1}\right)$$

nov 25-11:07

Kolla att:

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5\cdot 1+3\cdot 2 & -5\cdot 3+3\cdot 5 \\ 2\cdot 1-1\cdot 2 & 2\cdot 3-1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nov 25-11:09

När vi har en inverterbar matris A, kan vi räkna med positiva och negativa potenser av A.

nov 25-11:12

$$A^{-3}, A^{-2}, A^{-1}, I, A, A^2, A^3, \ldots$$

$$I = A^0$$

$$A^{l+k} = A^l \cdot A^k$$

$$A^{1+(-1)} = A^1 \cdot A^{-1}$$

$$I = A^0 = A \cdot A^{-1}$$

nov 25-11:12

Ex Uppgift 6.13

Matrisen X uppfyller

$$AXA = AX + I$$

där A är inverterbar och $A - I$ också.

a) Bestäm X

nov 25-11:14

Vad göra?

Gångra med A^{-1} till vänster;

$$\overbrace{A^{-1}A}^{=I}XA = \overbrace{A^{-1}A}^{I}X + A^{-1}$$

$$\iff$$

$$XA = X + A^{-1}$$

$$\iff XA - A^{-1} = X \iff$$

nov 25-11:17

$$\iff X(A-I)-A^{-1}=0$$

$$\iff X(A-I)=A^{-1}$$

men $A-I$ är inverterbar och vi kan multiplicera med $(A-I)^{-1}$ till höger och få;

nov 25-11:19

$$X = A^{-1}(A-I)^{-1}$$

b) Vad blir X

om $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Lättare räkningar om vi skriver

$$X = ((A-I)A)^{-1}$$

nov 25-11:21

$$A-I=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$(A-I)A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 3+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot 3-2\cdot 1 & 1\cdot 1-2\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

nov 25-11:24

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Här kan vi testa

Cramers regel

$$\mathrm{Adj}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 7 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 20$$

nov 25-11:26

Alltså

$$X = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

nov 25-11:31

Uppgift 6.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & r \\ 1 & r & 1 \\ r & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) För vilka r är A inverterbar?

b) Bestäm A^{-1} då r=2.

nov 25-11:32

$\det A \neq 0 \iff$

A är inverterbar

Räkna ut $\det A$.

Testa med Sarrus regel ;

nov 25-11:32

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & r \\ 1 & r & 1 \\ r & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\cdot r\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot r + r\cdot 1\cdot 1$$

$$- 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - r\cdot r\cdot r$$

$$= -r^3 + 3r - 2$$

När är detta $\neq 0$?

nov 25-11:33

Lös $r^3 - 3r + 2 = 0$

Testa heltalsrötter!

Faktorer i 2;

$-2, -1, 1, 2.$

Vi har alltså faktorerna

$(r+2)(r-1)$

nov 25-11:35

$$r-1$$

$$r^3-3r+2 \quad | \quad (r+2)(r-1)$$

$$-(r^3+r^2-2r) \quad r^2+r-2$$

$$0-r^2-r+2$$

$$-r^2-r+2$$

$$0$$

nov 25-11:37

Alltså är A
inverterbar om
$r \neq 1$ och $r \neq -2$.
b) Beräkna A^{-1}
(då $r=2$)

nov 25-11:39

Vi kan beräkna

A^{-1} med formeln.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & r \\ 1 & r & 1 \\ r & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \hat{A}_{1,1} = r - 1$$

nov 25-11:40

$$\hat{A}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \hat{A}_{2,1} = 1 - r$$

$$\hat{A}_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \hat{A}_{3,1} = 1 - r^2$$

$$\hat{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \hat{A}_{1,2} = 1 - r$$

nov 25-11:41

$$\mathrm{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 1 & r \\ 1 & r & 1 \\ r & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-1 & r-1 & 1-r^2 \\ r-1 & 1-r^2 & r-1 \\ 1-r^2 & r-1 & r-1 \end{pmatrix}$$

Alltså;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & r \\ 1 & r & 1 \\ r & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{(r-1)^2(r+2)}\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

nov 25-11:43